

Comparaisons robustes de la pauvreté multidimensionnelle

Jean-Yves Duclos

Département d'Économie and CIRPÉE, Université Laval, Canada,
and Institut d'Anàlisi Econòmica (CSIC), UAB, Barcelona, Spain

David Sahn

Food and Nutrition Policy Program, Cornell University

et

Stephen D. Younger

Food and Nutrition Policy Program, Cornell University

Septembre 2002

1 Introduction

La pauvreté est communément évaluée comme un phénomène multidimensionnel. Et pourtant, la plupart des travaux empiriques sur la pauvreté ne jugent le bien-être d'une personne qu'avec une référence uni-dimensionnelle, habituellement les dépenses, ou bien le revenu par tête ou par adulte. Quand plusieurs indicateurs de bien-être sont utilisés, les comparaisons de pauvreté soit sont faites pour chaque indicateur indépendamment des autres¹, soit sont établies en utilisant une agrégation arbitraire de plusieurs indicateurs en un seul indice². Dans chacun des cas, l'agrégation par indicateurs d'indicateurs individuels ou par individus de statuts individuels de bien-être requiert des règles d'agrégation spécifiques et aucune d'entre elles n'a encore été conue de sorte à recevoir une approbation unanime³. Les comparaisons multidimensionnelles de la pauvreté requièrent également l'estimation de lignes de pauvreté multidimensionnelle, une procédure qui est problématique d'un point de vue éthique et empirique même dans un cadre unidimensionnel.

En prenant comme point de départ, la conviction largement répandue selon laquelle les comparaisons de pauvreté multidimensionnelle sont attrayantes d'un point de vue éthique et théorique, notre objectif dans cet article est de répondre à quelques unes de leurs difficultés méthodologiques, statistiques et empiriques. En particulier, nous montrons comment déterminer si des comparaisons de pauvreté réellement multidimensionnelle sont robustes à l'agrégation d'indicateurs multiples, à la sélection d'indices de pauvreté multidimensionnelle (pour l'agrégation par individus), à la spécification des lignes de pauvreté multidimensionnelle (ou les « frontières de pauvreté ») ou à la présence de variabilités d'échantillon dans les estimateurs utilisés.

Nous commençons dans la section 2 par considérer les comparaisons de pauvreté qui impliquent deux mesures ou plus de bien-être et par nous demander si la pauvreté est plus faible dans une population A que dans une population B. À ce stade, nous faisons une importante distinction entre les définitions d'*intersection* ou d'*union* de la pauvreté⁴. Si nous mesurons le bien-être avec le revenu et la taille, par exemple : une personne pourrait être considérée comme pauvre si son revenu est inférieur à une ligne de pauvreté de revenu *ou* si sa taille est inférieure à une ligne de pauvreté de taille. Nous définirons cela comme une définition d'*union* de la

¹ce qui impliquerait de comparer les taux d'alphabétisation dans chacun des pays puis les taux de mortalité dans chacun des pays et ainsi de suite.

²L'exemple le mieux connu de cette pratique est l'Indice de Développement Humain de l'UNDP (1990), qui utilise une moyenne pondérée d'indicateurs moyens de population.

³De telles règles ont été le sujet d'études de quelques travaux récents. Voir par exemple Tui (2000) et Bourguignon et Chakravarty (2000). Ces derniers donnent également plusieurs exemples intéressants dans lequel les classements de pauvreté varient selon le choix de la méthode d'agrégation.

⁴Pour une discussion complémentaire plus récente sur ce sujet, voir *inter alia* Bourguignon et Chakravarty (2000,2002), Atkinson (2002) et Tsui (2002).

pauvreté multidimensionnelle. Une définition d'*intersection*, cependant, considérerait qu'une personne est pauvre si elle tombe sous les *deux* lignes de pauvreté. Contrairement aux travaux antérieurs, les tests que nous développons sont valables pour les deux définitions, et aussi valables en fait pour n'importe quel choix de définitions intermédiaires pour lesquelles la ligne de pauvreté d'une dimension est une fonction du bien-être mesuré dans l'autre dimension.

Dans la section 3, nous montrons comment la méthodologie se spécialise à des cas dans lesquels une des mesures du bien-être est discrète. Par exemple, on pourrait considérer l'alphabétisation comme un indicateur de bien-être et penser que la population alphabétisée est plus riche que la population mal alphabétisée pour un même niveau de revenu. Dans de tels cas, on peut diviser la population en deux sous-groupes en utilisant la valeur de la variable discrète de bien-être et comparer les niveaux d'une variable continue de bien-être telle que le revenu à l'intérieur et entre les sous-groupes. Cet exemple s'avère être un cas particulier des méthodes dérivées dans la section 2. Exactement la même méthode s'applique aux comparaisons de pauvreté dans laquelle une dimension (par exemple, le revenu) contribue au bien-être mais le fait très différemment pour ceux qui appartiennent à des sous-groupes différents de la population. L'appartenance à un groupe définit l'autre dimension du bien-être. Une fois encore, le fondement de cela est que l'on peut raisonnablement s'attendre à ce que chaque sous-groupe ait un niveau différent de bien-être total pour le même montant de revenu⁵. La section 3 discute également l'importante question qui consiste à savoir si les mesures de la pauvreté multidimensionnelle devraient être continues aux frontières de pauvreté, et ce qu'il advient si elles ne le sont pas.

Tout au long de l'article, nous suivons l'approche de la dominance pour les comparaisons de pauvreté, initialement développée par Atkinson (1987) et Foster et Shorrocks (1988a,b,c) dans un contexte unidimensionnel⁶. Il est bien connu qu'un avantage important de cette approche est qu'elle peut générer des classements de pauvreté qui sont robustes au choix de l'indice de pauvreté parmi de larges classes d'indices (les classements sont robustes à la mesure de pauvreté). Dans notre contexte multidimensionnel, cela implique également la robustesse quant à la manière avec laquelle les indicateurs multidimensionnels interagissent pour générer un bien-être individuel général. Contrairement aux travaux antérieurs sur les comparaisons multidimensionnelles, nos classements sont également robustes aux lignes de pauvreté, dans le sens où ils sont valables pour le choix de n'importe quelle frontière de pauvreté dans de larges domaines et pour n'importe laquelle des définitions de la frontière de pauvreté comme elles ont été évoquées plus haut. Étant données la sensibilité connue de nom-

⁵Atkinson (2000) et Jenkins et Lambert (1993) (et plus récemment Chambaz et Maurin (1998) et Duclos et Makdissi (2000) par exemple) ont développé ce type d'analyse pour les comparaisons de pauvreté en présence d'hétérogénéité des ménages dans le but d'éviter de s'appuyer sur le choix d'un ensemble particulier d'échelles d'équivalence pour effectuer les comparaisons de pauvreté.

⁶Atkinson et Bourguignon (1982,1987) ont été les premiers à avoir utilisé cette approche dans le contexte du bien-être social multidimensionnel. Voir aussi Crawford (1999) pour une application récente.

breuses comparaisons de pauvreté au choix des lignes de pauvreté et les difficultés à choisir la « bonne » ligne de pauvreté, cet article est une contribution importante. Un dernier résultat obtenu est de fournir la distribution échantillonnale de nombreux estimateurs qui sont utiles pour l'analyse de la pauvreté multidimensionnelle, de telle sorte que l'on pourrait déduire des estimations d'échantillon la vraie valeur des mesures de pauvreté de la population. Les travaux précédents sur les comparaisons de la pauvreté multidimensionnelle ont ignoré la variabilité des échantillons ; pourtant, ceci est fondamental dès lors que l'étude des comparaisons de la pauvreté multidimensionnelle a une vocation pratique. La théorie de cet article et les résultats statistiques sont illustrés à l'aide de données issues de plusieurs pays en voie de développement.

2 Indicateurs multiples de bien-être

2.1 Frontières de pauvreté et agrégation de la pauvreté dans deux dimensions

Soit x et y deux indicateurs de bien-être individuel⁷. Ils pourraient être, par exemple, le revenu, les dépenses, la consommation calorique, l'espérance de vie, la taille, le poids, le degré de sécurité et de liberté personnelles, etc. Soit :

$$\lambda(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial x} \geq 0, \\ \frac{\partial \lambda(x, y)}{\partial y} \geq 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

un indicateur résumé du bien-être individuel (analogue mais pas nécessairement identique à une fonction d'utilité). Il convient de noter que les conditions sur les dérivées dans (1) signifient simplement que les différents indicateurs peuvent chacun contribuer au bien-être général. Nous faisons ces hypothèses pour simplifier la présentation mais elles ne sont pas strictement nécessaires tant que $\lambda(x, y)$ est non-décroissante en x et y . Il est clair que les inégalités larges sur les dérivées imposent peu de contraintes sur la valeur précise de ces contributions.

Nous supposons ensuite qu'une frontière de pauvreté inconnue sépare les pauvres des riches. On peut considérer cette frontière comme une série de points auxquels le bien-être général d'un individu est précisément égal au « niveau de pauvreté » du bien-être et en-dessous desquels les individus sont dans une situation de pauvreté. Cette frontière est supposée être

⁷Pour simplifier la présentation, nous nous concentrons sur le cas d'un bien-être individuel à deux dimensions. Nous illustrerons dans la section 2.5 l'extension à plus de deux dimensions.

définie implicitement par l'expression $\lambda(x, y) = 0$ et est analogue aux habituelles courbes d'indifférence décroissantes dans le plan (x, y) . L'ensemble des pauvres est ainsi obtenu par :

$$\Lambda(\lambda) = \{(x, y) | (\lambda(x, y) \leq 0)\}. \quad (2)$$

La distribution jointe de x et y est notée $F(x, y)$. Pour des raisons de simplicité analytique, nous nous concentrons dans cet article sur les classes d'indices additifs de pauvreté multidimensionnelle⁸. Un indice additif de pauvreté qui combine les deux dimensions du bien-être peut être définie de manière générale par $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \int \int_{\Lambda(\lambda)} \pi(x, y; \lambda) dF(x, y), \quad (3)$$

où $\pi(x, y; \lambda)$ est la contribution à la pauvreté d'un individu avec les indicateurs de bien-être x et y . Grâce à l'axiome d'emphase sur les pauvres (voir par exemple Foster (1984)), cette contribution vaut :

$$\pi(x, y; \lambda) \begin{cases} \geq 0 & \text{si } \lambda(x, y) \leq 0 \\ = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4)$$

Le taux de pauvreté multidimensionnel est obtenu quand $\pi(x, y; \lambda) = 1$ dès lors que $\lambda(x, y) \leq 0$.

Regardons maintenant la figure 1. Avec $\lambda_1(x, y)$, (3) est un indice de pauvreté d'« intersection ». Il envisage qu'un individu soit en situation de pauvreté seulement s'il est pauvre *dans les deux dimensions à la fois* de x et y et par conséquent s'il se trouve dans le rectangle en traits de la figure 1. Avec $\lambda_2(x, y)$ (la courbe en L en pointillés), (3) est un indice de pauvreté d'« union ». Il considère qu'un individu est pauvre s'il est pauvre *dans l'une ou l'autre des deux dimensions* et par conséquent, s'il se situe en-dessous ou à gauche de la ligne pointillée. Enfin, $\lambda_3(x, y)$ fournit une approche intermédiaire. Quelqu'un peut être pauvre même si $x > z_y$, si sa valeur de x est suffisamment faible pour se situer à la gauche de $\lambda_3(x, y) = 0$.

2.2 Dominance de pauvreté dans deux dimensions

Avant de faire des comparaisons qui puissent être robustes pour une grande classe de procédures d'agrégation de la pauvreté, il est utile de présenter un exemple particulier des indices de pauvreté multidimensionnelle de (3), à savoir une extension bi-dimensionnelle de l'indice FGT (Foster, Greer et Thorbecke (1984)) :

⁸Ceci est une hypothèse habituelle, souvent obtenue comme le produit d'un axiome de décomposabilité des sous-groupes, voir par exemple Foster, Green et Thorbecke (1984) et Bourguignon et Chakravarty (2002).

$$P^{\alpha_x, \alpha_y}(z_x, z_y) = \int_0^{z_y} \int_0^{z_x} (z_x - x)^{\alpha_x} (z_y - y)^{\alpha_y} dF(x, y) \quad (5)$$

pour $\alpha_x \geq 0$ et $\alpha_y \geq 0$. Cet indice joue un rôle important dans les comparaisons robustes que nous présentons ci-dessous parce qu'elle génère des *surfaces de dominance stochastique à deux dimensions*. Les comparaisons utilisent des ordres de dominance, s_x dans la dimension x et s_y dans la dimension y , qui vont correspondre respectivement à $s_x = \alpha_x + 1$ et $s_y = \alpha_y + 1$. Les paramètres α_x et α_y capturent également l'aversion à l'inégalité en matière de pauvreté dans les dimensions x et y respectivement. $P^{0,0}(z_x, z_y)$ donne un taux de pauvreté bi-dimensionnelle d'intersection, c'est-à-dire la proportion des individus avec les deux indicateurs de bien-être dans le domaine de pauvreté défini comme dans la figure 1. $P^{1,0}(z_x, z_y)$ fait la somme des écarts de pauvreté dans x (donnés par $\max(z_x - x, 0)$) pour ceux qui sont pauvres selon y et normalise ensuite cette somme par la taille de la population totale. $P^{1,1}(z_x, z_y)$ fait la somme du produit des écarts de pauvreté dans x et dans y , à nouveau normalisé par la taille de la population totale et peut ainsi être vu comme un indice d'écart de pauvreté moyenne bi-dimensionnelle, les poids sur les écarts de pauvreté dans une dimension étant les écarts de pauvreté dans l'autre dimension. Des interprétations analogues existent pour d'autres combinaisons des valeurs de α_x et α_y .

Cependant, au lieu de s'appuyer sur le classement de cette procédure arbitraire d'agrégation de la pauvreté (ou sur n'importe quelle autre procédure) en utilisant une ou plusieurs frontières de pauvreté, nous allons rechercher des classements de la pauvreté sur différentes classes de procédures d'agrégation définies dans les termes des réactions de $\pi(x, y; \lambda)$ aux variations de x et y et sur les domaines des frontières de pauvreté. Dans ce but, nous supposons que l'indice général de pauvreté dans (3) est différentiable à gauche⁹ par rapport à x et y sur l'ensemble $\Lambda(\lambda)$ jusqu'aux ordres pertinents de dominance, s_x pour les dérivées par rapport à x et s_y pour celles par rapport à y . Nous notons π^x la dérivée première¹⁰ de $\pi(x, y; \lambda)$ par rapport à x , π^y la dérivée première de $\pi(x, y; \lambda)$ par rapport à y et π^{xy} la dérivée de $\pi(x, y; \lambda)$ par rapport à x et y et les expressions similaires sont notées selon le même schéma.

Nous définissons ensuite la classe des indices de pauvreté bi-dimensionnelle $\ddot{\Pi}^{1,1}(\lambda^*)$ suivante :

$$\ddot{\Pi}^{1,1}(\lambda^*) = \left\{ P(\lambda) \left| \begin{array}{l} \Lambda(\lambda) \subset \Lambda(\lambda^*) \\ \pi(x, y; \lambda) = 0, \text{ dès lors que } \lambda(x, y) = 0 \\ \pi^x \leq 0 \text{ et } \pi^y \leq 0 \forall x, y \\ \pi^{xy} \geq 0, \forall x, y. \end{array} \right. \right\} \quad (6)$$

⁹Cette hypothèse de différentiabilité est faite pour simplifier l'explication du propos. Elle pourrait être relâchée.

¹⁰Les dérivées incluent les effets implicites de x et y sur $\lambda(x, y)$.

La première ligne à la droite de (6) définit l'ensemble de pauvreté le plus grand auquel le pauvre doit appartenir : l'ensemble de la pauvreté couverte par les indices $P(\lambda)$ devrait se situer dans cet ensemble maximal $\Lambda(\lambda^*)$. La seconde ligne suppose que les indices de pauvreté sont continus le long de la frontière de pauvreté. Cela exclut le taux de pauvreté multidimensionnelle qui est discontinue à la frontière de pauvreté. Cela implique entre autres choses que les petites erreurs de mesure ne devraient pas avoir d'impact énorme sur la pauvreté mesurée. La troisième ligne des hypothèses indique que les indices qui sont membres de $\ddot{\Pi}^{1,1}$ sont faiblement décroissants en x et y . Cela implique qu'une augmentation, soit de x soit de y , ne peut pas nuire à la réduction de la pauvreté. Étant donnée l'interprétation donnée ci-dessous à ces variables, cela semblerait être une hypothèse naturelle. Pour que les indices soient non dégénérés, nous devons également avoir $\pi^x < 0$, $\pi^y < 0$ et $\pi^{xy} > 0$ sur quelques intervalles de x et y . Notons également que les inégalités dans (6) sont faibles, ce qui est différent des inégalités fortes que l'on rencontre souvent dans la littérature. Ceci est cependant cohérent avec la façon dont nous menons les tests de dominance — nous testerons l'ordre strict des surfaces de dominance au lieu des classements faibles souvent testés dans la littérature empirique.

La dernière ligne suppose que le bénéfice marginal de pauvreté due à une hausse soit de x ou y décroît avec la valeur de l'autre variable. Hormis notre exclusion du taux de pauvreté, que nous expliquons ci-dessous, c'est la seule hypothèse dans (6) qui implique des restrictions contestables sur la classe $\Pi^{(1,1)}\lambda^*$; nous la discutons donc en détail. Atkinson et Bourguignon (1982) et Bourguignon et Chakravarty (2002) se réfèrent à elle comme une propriété de non décroissance de la pauvreté sous l'hypothèse de changement qui augmente la corrélation des attributs des pauvres. Pour voir ce que cela implique, il faut regarder la figure 2. Un premier individu, initialement situé en a , associé à un x faible, voit sa valeur de y également diminuée par un mouvement de a en b . Un second individu, qui possède plus de x que le premier individu bouge de c en d grâce à une augmentation de sa valeur de y équivalente à la baisse de y du premier individu. C'est ceci un changement qui augmente la corrélation des attributs des pauvres. Les distributions marginales à la fois de x et y ne sont pas affectées par ce passage. La distribution jointe, $F(x, y)$, est cependant augmentée par ce passage. La corrélation de la privation et la fréquence de la privation multiple sont plus fortes après ce passage qu'avant.

L'hypothèse $\pi^{xy} \geq 0$ peut également être comprise comme une hypothèse de « substituabilité ». Plus quelqu'un possède de x , moins sa pauvreté générale sera réduite si sa quantité de y augmente. Cette hypothèse pourrait se justifier d'un point de vue éthique dans de nombreux cas¹¹. Les gouvernements, par exemple, sont souvent poussés à s'occuper en premier de ceux qui souffrent de multiples privations même s'il peut être parfois plus coûteux en termes budgétaires d'atteindre ces personnes. Une amélioration de l'accès aux services de santé pour ceux qui sont plus pauvres en matières de dépenses de consommation semblerait également

¹¹voir par exemple Tsui (2002) pour une défense de ce point de vue.

socialement plus désirable que pour ceux qui sont plus riches relativement selon ce critère. Mais on peut également penser à d'autres cas dans lesquels l'hypothèse inverse devrait tenir, principalement pour des raisons « d'efficacité » (bien que ces raisons d'efficacité entreraient alors en conflit avec les jugements éthiques qui favorisent ceux qui souffrent de multiples privations.). Par exemple, l'éducation devrait être donnée en priorité aux enfants bien nourris (pour maximiser son impact en termes de bien-être) et le capital humain devrait être accordé à ceux qui ont une probabilité de survie plus grande (parce que ces actifs disparaissent après leur mort). Accroître la corrélation des privations et la fréquence de la privation multiple peut alors être utile dans la réduction de la pauvreté. Bourguignon et Chakravarty (2002) dérivent des critères de dominance pour cette seconde possibilité. Nous ne poursuivrons pas ici. La principale raison est que cette seconde approche pourrait limiter de manière drastique les classements robustes de frontière de pauvreté, en particulier si la robustesse est recherchée sur des définitions de frontière de pauvreté d'union, d'intersection ou intermédiaires.

Pour établir un théorème sur la dominance de pauvreté de premier ordre, nous notons $\Delta F = F_A - F_B$ la différence entre la fonction F pour A et pour B . La classe des indices définit en (6) donne lieu à la condition bi-dimensionnelle de dominance $\ddot{\Pi}^{1,1}$ suivante :

Theorème 1 (dominance de pauvreté $\ddot{\Pi}^{1,1}$)

$$\Delta P(\lambda) > 0, \forall P(\lambda) \in \ddot{\Pi}^{1,1}(\lambda^*), \quad (7)$$

$$ssi \Delta P^{0,0}(x, y) > 0, \forall (x, y) \in \Lambda(\lambda^*). \quad (8)$$

Preuve : voir l'annexe.

Si la condition (8) est remplie, le théorème 1 énonce que la pauvreté sera sans ambiguïté plus forte en A qu'en B pour tous les indices de pauvreté qui sont membres de $\ddot{\Pi}^{1,1}(\lambda^*)$. Il convient de noter que ceci tient compte d'une large variété de frontières de pauvretés — toutes celles telles que $\Lambda(\lambda) \subset \Lambda(\lambda^*)$. En raison de sa généralité, ce résultat semblerait tenir compte de puissants classements de pauvreté multidimensionnelle entre A et B .

La condition (8) exige que la *surface de dominance stochastique bi-dimensionnelle* fournie par le taux de pauvreté bi-dimensionnel soit plus élevée pour A que pour B pour toutes les paires de frontières de pauvreté d'intersection qui sont dans $\Lambda(\lambda^*)$.

Pour voir clairement ce que cela implique, nous retournons à la figure 1 et envisageons une frontière de pauvreté pour $\Lambda(\lambda^*)$. Dans ce cas, le domaine pertinent pour le test serait un rectangle tel que celui défini par les axes et les limites supérieures (z_x, z_y) . Ainsi, pour établir une comparaison robuste de pauvreté dans ce domaine, nous devons vérifier que la surface de dominance de A est au-dessus de celle de B pour tous les points de ce rectangle. Notons toutefois qu'une fois que ceci est établi, nous sommes assurés d'avoir un classement robuste de

pauvreté non seulement à cette frontière précise de pauvreté d'intersection définie par (z_x, z_y) mais aussi pour n'importe quelle autre frontière de pauvreté qui « loge » dans ce rectangle. Ces frontières alternatives de pauvreté incluraient toutes les frontières intermédiaires (du type de $\lambda_3(x, y) = 0$ dans la figure 1 qui pourraient aller dans le rectangle défini par $(0, 0)$ et (z_x, z_y)). Cela en dépit du fait que les surfaces de dominance bi-dimensionnelle ne sont elles-mêmes que des indices de pauvreté d'intersection.

Pour une frontière de pauvreté d'union λ^* , le domaine de test serait une région en L définie dans la figure 1 par $\Lambda(\lambda_2)$. Une fois encore, la condition (8) exige que la surface de dominance soit plus élevée pour A que pour B pour tous les points à l'intérieur de cette région. Si cela est établi, nous sommes assurés d'un classement robuste de la pauvreté pour toutes les autres frontières de pauvreté d'union, d'intersection ou intermédiaires et les ensembles de pauvreté qui sont dans la zone de test. L'extension à des frontières **extérieures** plus générales telles que $\lambda_3(x, y) = 0$ suit naturellement.

2.3 Des tests de dominance d'ordre supérieur

Pour la dominance d'ordre plus élevé, nous devons accroître l'ordre dans une dimension ou dans les deux à la fois. Chacune des deux approches ajoute des hypothèses supplémentaires sur les effets d'un changement soit de x soit de y sur la pauvreté agrégée et limite ainsi la classe applicable des mesures de pauvreté. Ces hypothèses supplémentaires sont analogues à celles trouvées dans la littérature sur la dominance uni-dimensionnelle et elles imposent que les indices réagissent de plus en plus favorablement à des hausses des niveaux de vie en bas de la distribution du bien-être. Ces hypothèses exigent en plus que les réactions des indices aux changements d'un seul indicateur soit d'autant plus grand que le niveau des autres indicateurs de bien-être est faible.

Pour illustrer cela, nous supposons en plus des conditions ci-dessus pour $\ddot{\Pi}^{1,1}$ que la dérivée de premier ordre $\pi^x(x, y; \lambda)$ est continue dès lors que $\lambda(x, y) = 0$. Supposons ensuite que l'égalisation des transferts en x pour une valeur donnée de y réduit faiblement la pauvreté agrégée et que cet effet est décroissant avec les valeurs de y . Nous obtenons alors la classe suivante des indices de pauvreté bi-dimensionnelle :

$$\ddot{\Pi}^{2,1}(\lambda^*) = \left\{ P(\lambda) \left| \begin{array}{l} P(\lambda) \in \ddot{\Pi}^{1,1}(\lambda^*) \\ \pi^x(x, y; \lambda) = 0 \forall y, \\ \pi^{xx}(x, y; \lambda) \geq 0 \forall x, \\ \text{et } \pi^{xxy}(x, y; \lambda) \leq 0, \forall x, y. \end{array} \right. \right\} \quad (9)$$

Cela conduit à la condition de dominance suivante :

Theorème 2 (Dominance de pauvreté $\ddot{\Pi}^{2,1}$)

$$\begin{aligned} \Delta P(\lambda) &> 0, \forall P(\lambda) \in \ddot{\Pi}^{2,1}(\lambda^*), \\ \text{ssi } \Delta P^{1,0}(x, y) &> 0, \forall (x, y) \in \Lambda(\lambda^*). \end{aligned} \quad (10)$$

Preuve : voir l'annexe

Ceci teste la dominance simultanée d'ordre 2 pour x et d'ordre 1 pour y en vérifiant si l'écart moyen de pauvreté en x (donné par $P^{1,0}(x, y)$), progressivement accumulé dans la dimension y , est plus grand en A qu'en B , sans se soucier du choix de la frontière de pauvreté d'intersection (x, y) à l'intérieur de $\Lambda(\lambda^*)$. Les propriétés de classement sont analogues à celles du théorème 1.

Bien qu'il ne soit pas prouvé que c'est nécessaire, nous pouvons évoluer vers des ordres supérieurs de dominance dans la dimension x . Les classes des indices de pauvreté appartenant à $\Pi^{s_x, 1}(\lambda^*)$ deviennent de plus en plus limitées au fur et à mesure que s_x augmente. Pour $\ddot{\Pi}^{3,1}(\lambda^*)$ par exemple, les indices de pauvreté doivent obéir au principe de sensibilité aux transferts¹² en x et doivent d'autant plus réagir à un transfert composé favorable que la valeur de y est faible. De plus fortes valeurs de s_x impliquent la conformité avec des principes d'ordre supérieur de transferts¹³.

De plus, on peut augmenter simultanément à la fois s_x et s_y . Les procédures, les classes d'indices de pauvreté, et les relations de dominance sont analogues à celles décrites ci-dessus. Par exemple, les conditions d'adhésion à $\ddot{\Pi}^{2,2}(\lambda)$ exigent que les indices de pauvreté soient convexes à la fois en x et en y et qu'ils obéissent pas conséquent au principe de transferts dans ces deux dimensions. Elles exigent également que ce principe soit d'autant plus fort dans une dimension du bien-être que le niveau de l'autre dimension est faible. Enfin, elles imposent aussi que le niveau de convexité dans une dimension de bien-être soit convexe dans le niveau de l'autre indicateur de bien-être. La condition de dominance vérifie alors si $P^{1,1}(x, y)$ est plus grand en A qu'en B pour tout $(x, y) \in \Lambda(\lambda^*)$.

2.4 Pertinence des méthodes

Les méthodes que nous proposons ci-dessus sont plus générales que les deux autres méthodes que les chercheurs ont utilisées pour étudier la pauvreté dans de multiples dimensions. Une approche est d'agréger des multiples dimensions de pauvreté dans un indice univarié, en donnant des poids arbitraires à chacune des mesures individuelles de bien-être. L'exemple le mieux

¹²Pour une définition, voir par exemple Shorrocks et Foster (1987).

¹³Pour une illustration de cela dans un cadre uni-dimensionnel, voir Fishburn et Willig (1984).

connu est l'Indice de Développement Humain (UNDP, 1990), qui construit d'abord une mesure numérique sommaire de chaque variable de bien-être et ensuite agrège ces mesures dans l'IDH en utilisant des poids arbitraires. Une approche alternative dans le même esprit serait d'additionner les variables de bien-être de chaque individu et ensuite de créer une mesure sommaire de cette somme pondérée pour toute la population. Dans chacun de ces cas, la méthode réduit de manière arbitraire le problème de la comparaison de la pauvreté en rassemblant plusieurs dimensions en une seule. Les tests que nous proposons généralisent clairement cette approche plutt restrictive.

La seconde approche est de comparer indépendamment de nombreux indicateurs individuels de bien-être. De telles comparaisons univariées sont également des cas particuliers de notre approche. Pour le voir, il suffit de se souvenir que la surface de dominance $P^{s_x-1, s_y-1}(x, y)$ est cumulative dans les deux dimensions. Ainsi, l'intégration d'une dimension donne la courbe de dominance univariée de l'autre dimension. Dans les termes de la figure 1, le domaine des tests univariés séparés serait une ligne verticale jusqu'à z_y en $x = \infty$ pour la variable y et une ligne horizontale jusqu'à z_x en $y = \infty$ pour la variable x .

Il existe alors deux manières de différencier notre test de cette approche « une à la fois ». Premièrement, il est possible que la courbe de dominance univariée de A se situe au-dessus de celle de B à la fois en $x = \infty$ et $y = \infty$ pour un intervalle pertinent des lignes de pauvreté mais que A ne soit pas au-dessus de B en un ou plusieurs points intérieurs dans le domaine de test montré dans la figure 1. Dans ce cas, l'approche « une à la fois » conclurait que la pauvreté est plus forte en A qu'en B mais notre approche bivariée ne parviendrait pas à cette conclusion. En effet, l'approche bivariée vérifie la *distribution jointe* de tous les indicateurs de bien-être et est ainsi capable de montrer la corrélation entre de tels indicateurs, ce qui est d'une grande importance éthique puisqu'elle aide à capturer l'incidence jointe de la privation dans de multiples dimensions. L'analyse « une à la fois » ne peut faire cela. Deuxièmement, il est possible que les surfaces de dominance se croisent en $x = \infty$ et/ou $y = \infty$ mais que la surface de A soit au-dessus de la surface de B pour une vaste zone de points intérieurs dans le domaine de test. Dans ce cas, l'approche « une à la fois » ne serait pas capable d'établir un classement de la pauvreté alors que notre test y parviendrait pour une définition d'intersection de la pauvreté et pour quelques définitions intermédiaires. Une définition d'union cependant n'inclurait pas les marges de la surface dans son domaine de test et ne trouverait pas par conséquent de classement robuste de la pauvreté.

Pour visualiser ces différences méthodologiques, la figure 3 représente graphiquement une surface de dominance typique. Une plus grosse « bosse » au milieu de la surface correspond à une plus forte corrélation entre les deux variables de bien-être. De la même manière, on peut trouver la courbe de dominance univariée pour une dimension à l'extrémité supérieure de la surface de dominance de l'autre dimension. Sur la figure 3, la courbe univariée pour le logarithme des dépenses des ménages se situe à l'extrémité droite de la surface alors que

le z-score (sur lequel nous allons revenir plus bas) de la taille en fonction de l'âge se situe derrière.

Lorsque nous faisons des comparaisons de dominance, nous testons la différence entre deux surfaces telles que celles montrées dans la figure 3. La figure 4 décrit une telle différence pour le cas où une surface a des variables de bien-être fortement corrélées alors que la seconde n'en a pas (la différence dans ces surfaces « enfle » au milieu). Bien que les différences dans les courbes de dominance univariée dans les deux dimensions coupent clairement l'origine (aux extrémités gauche et droite de la figure), il y a une section intérieure significative où la première surface est entièrement au-dessus de la seconde. Ainsi, il y a des frontières de pauvreté pour lesquelles la première distribution comporte plus de pauvreté que la seconde. À l'inverse, nous pourrions envisager d'abaisser la figure 4 de telle sorte que les différences univariées soient toutes négatives. La première distribution dominerait alors la seconde dans les deux dimensions individuellement mais il y aurait toujours une section au milieu où la première surface se situerait au-dessus de la seconde. Ainsi, il n'y aurait pas une dominance de pauvreté bivariée qui s'expliquerait par une première distribution qui présenterait une trop forte fréquence de la privation multiple. Nous donnons d'autres exemples de cela dans la section 2.5.

2.5 Exemples

Dans le premier exemple, nous envisageons la question suivante : est-ce que la population rurale est plus pauvre que la population urbaine au Vietnam ? De nombreuses études, du Vietnam et d'ailleurs, trouvent que les gens vivant dans les zones rurales tendent à être plus pauvres si on les juge par le seul critère du revenu ou des dépenses de consommation. Cependant, il est possible que les gens soient mieux nourris dans les zones rurales que dans les zones urbaines, toutes choses égales par ailleurs, parce qu'ils ont une préférence pour des aliments plus nutritifs à un coût inférieur ou parce que les prix unitaires des produits alimentaires y sont inférieurs. Dans de tels cas, inclure un indicateur du statut nutritionnel pourrait changer le bien-être relatif des résidents urbains et ruraux. Pour tester cela, nous mesurons le bien-être selon deux dimensions : les dépenses du ménage par tête et le statut nutritionnel, mesuré par la taille des enfants standardisée par l'âge et le sexe qui sont transformés en écarts par rapport à la médiane d'une population en bonne santé, connus comme le z-score. Les enfants stoppés dans leur croissance sont largement utilisés comme un indicateur de mauvaise santé et de malnutrition. L'échantillon vient du Vietnam Living Standards Measurement Survey mené en 1993¹⁴. Il s'agit d'une étude du ménage représentatif à l'échelle nationale qui a collecté des

¹⁴L'information sur le LSMS est disponible dans Grosh et Glewwe (1998). L'information concernant spécifiquement l'étude que nous utilisons est disponible sur le site web du LSMS à l'adresse : <http://www.worldbank.org/html/prdph/lsmc/country/vn93/vn93bid.pdf>.

données détaillées sur l'anthropométrie et les dépenses de consommation. Les premières, cependant, ne sont disponibles que pour les enfants âgés de moins de 60 mois : notre échantillon ne comporte donc que ces enfants et non tous les membres des ménages interrogés.

Les tests décrits dans l'équation (8) exigent la comparaison de deux surfaces de dominance des enfants ruraux et urbains au Vietnam : la figure 5 le montre pour $s_x = s_y = 1$. L'axe y mesure le z-score de la taille en fonction de l'âge, pour évaluer si l'enfant est rachitique ; l'axe x mesure des dépenses de consommation par tête pour le ménage auquel appartient l'enfant et l'axe s mesure la proportion cumulée des enfants qui se trouvent sous les points définis dans le domaine (x, y) . Les enfants les plus pauvres sont ceux placés dans le coin avant gauche du graphique. Si la surface de dominance rurale est au-dessus de la surface urbaine sur la zone pertinente des frontières de pauvreté (les valeurs de dépenses par tête et de *rachitisme*), la pauvreté est plus forte (plus de gens se situent en-dessous des niveaux donnés de bien-être dans chacune des dimensions) dans les zones rurales. Cette conclusion est alors robuste au choix des indices de pauvreté dans la classe $\tilde{\Pi}^{1,1}(\lambda^*)$.

En théorie, nous devrions tester sur l'intégralité de la zone définie par $\Lambda(\lambda^*)$ mais il est plus pratique de choisir une grille de points dans le domaine (x, y) sur lequel des tests sont effectués¹⁵. Ici, nous utilisons une grille de taille 20×20 , répartie de manière égale sur le domaine *entier* du logarithme des dépenses par tête et du z-score de la taille pour l'âge. À la suite de Howes (1996), nous regardons s'il existe une différence significative dans la surface de dominance pour chaque point de la grille et rejetons l'hypothèse nulle de non-dominance de A par B seulement si tous les tests statistiques (des t de Student) ont les bons signes et sont significativement différents de zéro.

La figure 5 indique clairement que, sur pratiquement tout l'intervalle de dépenses et de rachitisme, les enfants ruraux sont plus pauvres que les urbains. Le tableau 1 montre si ces affirmations sont statistiquement significatives au niveau de 5%. Un signe négatif indique que la surface de dominance urbaine est significativement en-dessous de la rurale ; un signe positif indique le contraire et un zéro indique que la différence n'est pas significative statistiquement. Les différences négatives sont statistiquement significatives pour n'importe quel couple raisonnable de lignes de pauvreté (à l'exception des lignes tout en bas du tableau 1). Ainsi, par le théorème 1, la conclusion selon laquelle les enfants ruraux sont plus pauvres que les urbains est valable pour pratiquement n'importe quelle frontière de pauvreté d'intersection, d'union ou intermédiaire.

Notre second exemple teste la dominance de pauvreté de premier ordre en trois dimensions. Nous nous demandons si la pauvreté a reculé au Ghana entre 1993 et 1998 en utilisant les données des Demographic and Health Surveys. Les trois variables que nous envisageons

¹⁵Le calcul de ces statistiques, aussi bien que la distribution des échantillons, peut être réalisé en utilisant le logiciel DAD (Duclos, Arrar et Fortin (2002)), disponible gratuitement à www.mimap.ecn.ulaval.ca

pour les enfants âgés de moins de cinq ans : leur probabilité de survie, leur z-score de taille pour l'âge (le rachitisme) et un indice des actifs du ménage auquel ils appartiennent¹⁶. Nous comparons les surfaces de dominance pour ces trois mesures en 1993 et en 1998, les deux années pour lesquelles les données des DHS existent. Puisque nous ne pouvons pas représenter graphiquement la surface en quatre dimensions qui en résulte, nous résumons les conclusions des tests statistiques dans la figure 6. Nous utilisons une grille de taille $20 \times 20 \times 20$ de points tests et chaque couche horizontale dans la figure 6 est similaire au tableau 1 dans notre exemple précédent¹⁷. Un point gris clair indique que la surface de 1998 est significativement au-dessus de celle de 1993 ; un point gris plus foncé indique que la surface de 1998 est significativement en-dessous de celle de 1993 et un point noir indique qu'elles ne sont statistiquement pas distinguables à un seuil de 5%. À partir de la figure, il est clair qu'il n'y a pas de résultat robuste de dominance de pauvreté. Sur quelques parties du domaine, la pauvreté semble avoir décliné entre 1993 et 1998. Mais dans des zones relativement importantes, en particulier pour des faibles valeurs de la dimension de l'actif des ménages, l'inverse peut également être vrai.

En plus de montrer que nos tests sont possibles dans plus de deux dimensions, cet exemple montre l'importance de vérifier la robustesse des comparaisons de pauvreté en utilisant des tests tels que ceux que nous employons. Pour le taux de pauvreté d'intersection, montré par les points sur les surfaces de dominance, un choix judicieux des lignes de pauvreté pourrait amener à conclure que la pauvreté s'est aggravée, améliorée ou n'a pas changé selon ce choix spécifique. Aucun de ces résultats ne serait robuste mais n'importe lequel semblerait plausible pris isolément.

Les deux exemples suivants mettent en évidence la différence entre l'utilisation des tests de dominance bivariée et les tests univariés **un en une fois** sur les mêmes variables. Le tableau 2 donne les résultats pour les tests des différences dans les surfaces de dominance pour le rachitisme et la probabilité de survie de l'enfant au Cameroun et à Madagascar. Les données viennent des Demographic Health Surveys (DHS) de 1997 dans ces deux pays¹⁸. Les courbes de dominance de l'approche **un en une fois** sont données dans la dernière ligne du tableau (pour la probabilité de survie) et dans la dernière colonne (pour le rachitisme). Ces comparaisons univariées concluraient que la pauvreté est pire au Madagascar qu'au Cameroun, que celle-ci soit mesurée en probabilité de survie ou en degré de rachitisme. Néanmoins, la comparaison bivariée montre plusieurs points intérieurs où les surfaces ne sont pas statistiquement différentes et deux points montrent même que la différence est en fait positive. Donc, notre méthode ne parviendrait pas à la même conclusion, trouvant qu'il n'existe pas de classement de premier ordre de la pauvreté qui soit statistiquement significatif.

¹⁶L'information sur l'estimation des probabilités de survie et l'indice des actifs peut être trouvée dans Sahn, Stifel et Younger (1999) et Sahn et Stifel (2000).

¹⁷Nous avons exclu certaines couches horizontales pour rendre le graphique plus lisible.

¹⁸L'information sur ces études est disponible à l'adresse <http://www.measuredhs.com>. La probabilité de survie de l'enfant est estimée comme chez Sahn, Stifel et Younger (1999).

Le tableau 3 montre l'autre possibilité d'obtenir des conclusions différentes. Ces résultats sont aussi des tests de différences entre des surfaces de dominance de premier ordre pour le rachitisme et la probabilité de survie en Colombie et en République Dominicaine et viennent des données des DHS de ces deux pays menés en 1995 et 1996 respectivement. Dans ce cas, il y a dominance sur une marge (la probabilité de survie) mais pas pour l'autre (le rachitisme). Dans ces conditions, l'approche **un en une fois** ne trouverait pas que la pauvreté est nécessairement plus pauvre dans une population que dans l'autre. Cependant, la surface de dominance de la Colombie est significativement en dessous de celle de la République Dominicaine pour un très large intervalle de points intérieurs, ce qui suggère que, sous une définition d'intersection de la pauvreté aussi bien que pour plusieurs définitions intermédiaires, on peut affirmer de manière robuste que la pauvreté était plus faible en Colombie qu'en République Dominicaine.

2.6 Exemple

La figure 7 montre la frontière critique de pauvreté jusqu'à laquelle la pauvreté, mesurée par le z-score de la taille en fonction du poids des enfants et leur probabilité de survie, est plus faible au Madagascar qu'en Égypte. Une frontière plus basse est également dessinée deux écarts type en dessous de la frontière estimée standard. La frontière et les écarts types sont calculées dans la dimension verticale (**le z-score du poids pour l'âge**). Les données viennent des études du DHS pour ces deux pays en 1997 et 1992 respectivement. La surface de dominance du Madagascar est significativement en dessous de celle de l'Égypte pour une large zone de points intérieurs, y compris tous les z-score négatifs. Mais la limite baisse profondément pour des valeurs plus élevées de la probabilité de survie, ce qui limite considérablement l'intervalle sur lequel la dominance de pauvreté d'union peut être établie.

3 Dominance multivariée avec des indicateurs discrets de bien-être

Nous montrons maintenant dans cette section comment les résultats de la section 2 se spécialisent au cas de distributions discrètes. Ce cadre discret va également aider à mieux comprendre les hypothèses faites plus tt et les procédures de tests impliquées. Supposons que la population puisse être séparée en K sous-groupes exhaustifs et exclusifs de population, dont la part dans la population totale est notée $\phi(k) = 1, \dots, K$. Donc, $\sum_{k=1}^K \phi(k) = 1$. Nous pouvons définir ces sous-groupes en se basant sur une mesure discrète du bien-être, telle que l'alphabétisation, le **droit de vote**, l'accès au service public ou les capacités physiques. D'une autre manière, on peut différencier les ménages selon leurs besoins relatifs, en se basant sur

leur taille et leur composition, leur type d'activités ou leur zone de résidence. Dans tous les cas, le point important est que ces différences discrètes dans les caractéristiques des ménages ou des individus suggèrent que, pour une valeur donnée des mesures continues de bien-être, certains groupes ont un bien-être général plus faible que d'autres. Cela pourrait être dû au fait que la variable discrète est elle-même une mesure de bien-être (être illettré est moins bien que savoir lire) ou parce qu'elle indique des différences dans les besoins, les lignes de pauvreté ou les prix. De plus, nous pouvons supposer qu'il y a quelque incertitude quant à la valeur précise de ces différences. Nous supposons plus bas que les K sous-groupes peuvent être rangés dans l'ordre décroissant de leurs « besoins », de telle sorte que, à des indicateurs alternatifs communs de bien-être, les individus du sous-groupe 1 ont plus de besoins que ceux dans le sous-groupe 2 qui ont eux-mêmes plus de besoins que les individus du sous-groupe 3, et ainsi de suite.

Puisque les indices pertinents sont une nouvelles fois supposés additifs, la pauvreté dans chacun des sous-groupes de population peut-être définie par :

$$P(k; z(k)) = \int_0^{z(k)} \pi_k(x) f(x; k) dx \quad (11)$$

où $f(x; k)$ est la densité des conditions de vie pour le sous-groupe k en x et $z(k)$ est la ligne de pauvreté du sous-groupe k dans la dimension de x . $\pi_k(x; z(k))$ est la contribution à la pauvreté du sous-groupe k d'un individu dans ce sous-groupe avec des conditions de vie égales à x . Puisque les non pauvres, par définition, ne contribuent pas à la pauvreté totale, $\pi_k(x) = 0$ si $x > z(k)$. La pauvreté totale dans la population est donnée par :

$$\begin{aligned} P(z(1), \dots, z(K)) &= \sum_{k=1}^K \phi(k) \int_0^{z(k)} \pi_k(x) f(x; k) dx \\ &= \sum_{k=1}^K \phi(k) P(k; z(k)). \end{aligned} \quad (12)$$

Pour simplifier la présentation, nous noterons parfois P l'expression $P(z(1), \dots, z(K))$. Un tel indice de pauvreté est la somme d'indices FGT à travers les sous-groupes, chacun avec sa propre ligne de pauvreté. Notons l'indice FGT pour le sous-groupe k par :

$$P^\alpha(k; z(k)) = \int_0^{z(k)} (z(k) - x)^\alpha f(x; k) dx. \quad (13)$$

La pauvreté totale, telle que mesurée par l'indice FGT, vaut alors :

$$P^\alpha(z(1), \dots, z(K)) = \sum_{k=1}^K \phi(k) P(k; z(k); \alpha). \quad (14)$$

Il convient de noter que $P^0(z(1), \dots, z(K))$ est le taux de pauvreté de la population avec chaque sous-groupe k qui se voit attribuer sa propre ligne de pauvreté $z(k)$. De manière similaire, $P^1(z(1), \dots, z(K))$ est l'écart moyen de pauvreté dans la population, à nouveau avec chaque sous-groupe k qui se voit assigné sa ligne de pauvreté spécifique $z(k)$. D'autres indices additifs de pauvreté multidimensionnelle peuvent être définis de manière similaire, en étendant par exemple les indices de pauvreté unidimensionnelle de Watts (1968) ou Chavrakarty (1983).

Nous supposons que les lignes de pauvreté des sous-groupes peuvent être rangées des groupes aux besoins les plus élevés vers les groupes aux besoins les plus faibles de la manière suivante :

$$z(1) \geq z(2) \geq \dots \geq z(K). \quad (15)$$

Ceci est l'équivalent discret de la condition $z_x^{(1)}(x) \leq 0$ dans la section 2. Le classement (15) est sensé puisque nous supposons que les individus dans le groupe k ont un bien-être plus faible ou des besoins plus grands que ceux dans le groupe $k + 1$, toutes choses égales par ailleurs. Nous supposons également pour des raisons de simplification analytique que $\pi_k(x)$ est dérivable à gauche entre 0 et z_k jusqu'à l'ordre pertinent de dominance, s . Pour la dominance de premier ordre, nous avons ensuite besoin d'un classement des dérivées de premier ordre de $\pi_k(x)$ par rapport à x , que nous notons $\pi_k^{(1)}$:

$$\pi_1^{(1)}(x) \leq \pi_2^{(1)}(x) \leq \dots \leq \pi_K^{(1)}(x) \leq 0, \forall x. \quad (16)$$

L'hypothèse (16) énonce qu'un accroissement de x engendre une réduction de la pauvreté d'autant plus grande que les besoins des individus sont grands. C'est l'équivalent de $\pi^{xy} \geq 0$ dans la section 2.

3.1 Indices continus de pauvreté

Afin de présenter simplement l'analyse, nous supposons que les $(s - 1)$ premières dérivées des fonctions $\pi_k^{(1)}(x)$ sont continues au niveau de la ligne de pauvreté. Pour la dominance de premier ordre, cela implique :

$$\pi_k(z(k)) = 0, \forall k = 1, \dots, K. \quad (17)$$

Comme dans le cas des variables continues de bien-être, il faut noter que l'hypothèse de continuité (17) n'est pas respectée par le taux de pauvreté de la pauvreté multidimension-

nelle. Les conséquences de cela vont être discutées brièvement. La classe $\Pi^1(z(1), \dots, z(K))$ des indices de pauvreté multidimensionnelle de premier ordre inclue alors tous les indices P définis dans l'équation (12) qui satisfont les hypothèses (15), (16) et (17). Cette définition conduit alors à l'équivalence suivante :

Theorème 3 (Dominance de premier ordre de pauvreté pour des populations hétérogènes)

$$\begin{aligned} \Delta P(\zeta(1), \dots, \zeta(K)) &> 0 \\ \forall P(\zeta(1), \dots, \zeta(K)) &\in \Pi^1(\zeta(1), \dots, \zeta(K)) \\ \text{et } \forall \zeta(k) &\in [0, z(k)], k = 1, \dots, K \\ \text{ssi } \sum_{k=1}^i \Delta P^0(k; \zeta) &> 0, \forall \zeta \in [0, z(i)] \text{ et } \forall i = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (18)$$

Preuve : Voir Atkinson (1991) et Jenkins et Lambert (1993). Pour faciliter cette référence, une preuve est également apportée dans l'annexe.

Souvenons-nous que $P^0(k; \zeta)$ est taux de pauvreté du sous-groupe k pour une ligne de pauvreté donnée, ζ , multipliée par la part du sous-groupe k dans la population totale. $\sum_{k=1}^i P^0(k; \zeta)$ nous donne ainsi, sous forme de proportion de la population totale le nombre d'individus sous ζ dans les sous-groupes de 1 à i , c'est-à-dire dans les i sous-groupes qui souffrent le plus des privations ou qui ont les besoins les plus importants. On peut donc considérer que $\sum_{k=1}^i P^0(k; \zeta)$ désigne l'indice cumulé du taux de pauvreté en ζ pour les i sous-groupes les plus dans le besoin. La condition de dominance de premier ordre (18) exige que ce taux de pauvreté soit plus grand en A qu'en B , indépendamment du nombre i de groupes que l'on souhaite inclure et pour toutes les lignes de pauvretés ζ telles que $0 \leq \zeta \leq z(i)$. Notons cependant qu'elle n'exige pas que chaque sous-groupe k ait indépendamment plus de pauvres en A qu'en B , ni que le taux de pauvreté de la population (avec chaque sous-groupe qui se voit assigner sa propre ligne de pauvreté) soit plus grand en A qu'en B . La condition (18) est l'équivalent discret de la condition (8) pour le cas continu. Ici, la distribution jointe peut se ramener à une distribution à une dimension en utilisant un ensemble fini de points de masse.

Pour voir cela plus clairement, considérons le cas des comparaisons de pauvreté n'impliquant que deux groupes d'individus, donc $K = 2$, avec $z(1)$ la ligne de pauvreté du groupe le plus dans le besoin et $z(2)$ celle de l'autre groupe. On vérifie d'abord la dominance multidimensionnelle en comparant le taux de pauvreté dans le groupe 1 pour des lignes de pauvreté ζ comprises entre 0 et $z(1)$, et ensuite en comparant les taux de pauvreté combinés des deux groupes pour toutes les lignes communes de pauvreté comprises entre 0 et $z(2)$. La figure 8 illustre cela : $\zeta(1)$ et $\zeta(2)$ désignent les lignes de pauvreté auxquelles la pauvreté est estimée dans chacun des groupes. Pour la dominance $\Pi^1(z(1), z(2))$, nous avons besoin de comparer le taux de pauvreté global pour toutes les combinaisons des lignes de pauvreté sur l'axe

$\zeta(1)$ (jusqu'à $z(1)$, c'est-à-dire jusqu'au point G) et sur la ligne des 45 degrés (jusqu'au point E). Comparer la pauvreté pour la combinaison des lignes de pauvreté sur l'axe $\zeta(1)$ revient à vérifier le signe de $\Delta P^0(k; \zeta)$ pour $\zeta \in [0, z(1)]$. Comparer la pauvreté pour la combinaison des lignes de pauvreté sur la ligne des 45 degrés (jusqu'au point E) revient à vérifier le signe de $\sum_{k=1}^2 \Delta P^0(k; \zeta)$ pour $\zeta \in [0, z(2)]$.

Si les conditions de dominance dans (18) sont remplies, nous obtenons alors un classement très robuste de la pauvreté multidimensionnelle. En effet, nous pouvons affirmer avec confiance que tous les indices de pauvreté multidimensionnelle contenus dans $\Pi^1(\zeta(1), \dots, \zeta(K))$ montreront qu'il y a plus de pauvreté dans A que dans B et ceci, sans se soucier de la sélection d'une combinaison quelconque de lignes de pauvreté, tant qu'ils appartiennent à l'ensemble défini par $\zeta(k) \in [0, z(k)], k = 1, \dots, K$.

3.2 Exemples

Notre premier exemple dans cette section traite du problème de l'équivalence d'échelle posé par la méthode suggérée en premier par Atkinson (1991). Nous nous posons la question suivante : quel type de paiement de transfert réduit le plus la pauvreté en Roumanie, les allocations familiales ou les pensions de sécurité sociale ? Parce que la réponse peut facilement être influencée par le choix de l'échelle d'équivalence, nous éviterons complètement ce choix. À la place, nous utilisons les tests de dominance bivariée où la seconde variable est la taille du ménage, un indicateur de besoins plus importants. Le groupe le plus en besoin est constitué des ménages de six personnes ou plus, le groupe suivant, un peu moins dans le besoin, contient les ménages à cinq personnes et ainsi de suite. Les données sont issues du Romania Integrated Household Survey (Gouvernement de Roumanie, 1994). L'autre variable de bien-être est le revenu du ménage auquel nous ajoutons les paiements de transferts pertinents (les allocations familiales ou les pensions de sécurité sociale). Nous avons standardisé ces paiements pour qu'ils aient la même moyenne, pour nous assurer que les tests ne reflèteront pas simplement le fait qu'un programme est plus généreux que l'autre.

Le tableau 4 donne les t de Student des différences des courbes de dominance du groupe le plus dans le besoin, puis des deux groupes le plus dans le besoin et ainsi de suite, jusqu'à l'intégralité de l'échantillon, comme le demande le théorème 3. La différence est entre la courbe de dominance pour le revenu plus les allocations familiales et celle du revenu plus les pensions de sécurité sociale. Pour les grands ménages, les allocations familiales réduisent clairement la pauvreté davantage que les paiements de sécurité sociale mais ce résultat s'inverse brutalement lorsque nous incluons les ménages avec seulement deux personnes où les courbes de dominance se croisent désormais et où les paiements de sécurité sociale semblent être plus bénéfiques aux ménages les plus pauvres. Ce cas de figure tient pour $s = 2$ et $s = 3$ (impliquant respectivement la courbe « d'écart de pauvreté » et celle de « gravité de la pau-

vreté »), ce qui suggère que nous ne pouvons pas faire établir de manière robuste lequel de ces deux paiements de transfert a le plus fort impact en termes de réduction de la pauvreté sans exclure les ménages de taille 2 et 1.

Notre second exemple dans cette section envisage un cas où la pauvreté est mesurée sur deux dimensions, les dépenses de consommation des ménages par tête et l’alphabétisation, cette dernière étant une variable discrète. Nous considérons les évolutions de la pauvreté au Pérou entre 1985 et 1994, telle que mesurée par l’Encuesta Nacional de Hogares sobre Medición de Niveles de Vida pendant ces deux années. Le tableau 5 est similaire au tableau 4 mais les groupes sont maintenant définis selon l’alphabétisation. Nous supposons que, pour un niveau donné de dépenses, ceux qui ne peuvent pas lire et écrire ont un bien-être inférieur à ceux qui le peuvent. Ainsi, le premier groupe est la population illettrée. Les t de Student sont pour la courbe de dominance de 1985 moins celle de 1994. À l’exception de la première ordonnée du groupe 1, qui manque de très peu le seuil de significativité des 5% (et pour laquelle il n’y a que très peu d’observations dans l’échantillon), il y a une claire détérioration de la pauvreté si on la mesure par l’alphabétisation et les dépenses de consommation.

4 Conclusion

Dans cet article, nous avons montré qu’il est possible de faire des comparaisons de pauvreté sensées quand la pauvreté tient compte des multiples dimensions du bien-être. Ces comparaisons ont plusieurs caractéristiques attrayantes :

1. Dans l’esprit de la littérature sur la dominance stochastique, leur robustesse peut être grande pour de larges classes de procédures d’agrégation de la pauvreté. Une considération particulière pour le cas multivarié est si la pauvreté est définie comme la pauvreté d’intersection ou d’union dans chaque dimension. Les méthodes que nous décrivons sont valables pour les deux, aussi bien que pour n’importe quel choix intermédiaire.
2. On peut établir la robustesse des comparaisons de pauvreté pour une large zone de frontières de pauvreté. Ou bien, on peut estimer une frontière critique de pauvreté jusqu’où la dominance de pauvreté multidimensionnelle fonctionne.
3. Les comparaisons de pauvreté sont possibles pour des combinaisons de variables de bien-être discrètes et/ou continues.
4. Les comparaisons impliquent des tests statistiques qui utilisent la distribution échantillonnale des estimateurs de pauvreté multidimensionnelle.

L’importance de ces méthodes repose sur deux considérations. La première est éthique : il est en effet largement reconnu que la pauvreté et le bien-être sont multidimensionnels par nature. Nous considérons cela comme donné, en se basant soit sur les arguments philosophiques

de Sen selon lesquels la pauvreté devrait être vue en termes de capacités et de fonctionnements multidimensionnels, ou alors en se basant sur le constat réaliste que le bien-être d'une personne implique des éléments qui ne s'achètent pas et qui transcendent le niveau de revenu. La seconde considération est pratique : dans quelle mesure les comparaisons multidimensionnelles vont-elles se distinguer des comparaisons unidimensionnelles ? Étant données les corrélations relativement faibles qui sont observées entre le revenu et les autres variables de bien-être, il ne devrait pas être surprenant de trouver des cas où les comparaisons de pauvreté dans plusieurs dimensions diffèrent sensiblement de comparaisons établies dans une seule dimension, ce que nous avons en effet trouvé de manière répétée en préparant les exemples donnés dans cet article.

Plus généralement, nous avons montré que nos comparaisons multidimensionnelles peuvent également se distinguer des comparaisons univariées dans chaque dimension individuelle de deux manières. On pourrait trouver de la dominance dans chaque dimension séparément si les marges des surfaces de dominance étaient différentes dans chaque dimension mais ne pas trouver de dominance multidimensionnelle si les surfaces se croisent à l'intérieur des surfaces. Cela attire l'attention sur l'importance de capturer la fréquence des privations multiples. Ou alors, les courbes de dominance sur une dimension pourraient se croiser, excluant ainsi la dominance univariée, mais les intérieurs des surfaces multidimensionnelles pourraient être uniformément différentes, permettant la dominance multivariée pour des définitions d'intersection ou d'union de la pauvreté. L'importance empirique de ces deux possibilités doit encore être établie de manière certaine. Notre expérience, que nous reconnaissons limitée, basée sur les comparaisons des études du DHS, est que la première est rare alors que la seconde serait plutôt assez commune. Mais il faut attendre des utilisations complémentaires avec d'autres variables et d'autres échantillons pour obtenir un jugement définitif sur l'importance de nos méthodes plus générales.

Références

- [1] Atkinson, A.B. (1987). "On the Measurement of Poverty", *Econometrica*, **55**, 749–764.
- [2] Atkinson, A.B. (1991). "Measuring Poverty and Differences in Family Composition", *Economica*, **59**, 1–16.
- [3] Atkinson, A.B. (1991). "Multidimensional Deprivation : Contrasting Social Welfare and Counting Approaches", mimeo, Nuffield College, Oxford University.
- [4] Atkinson, A.B. and F. Bourguignon (1982). "The Comparison of Multi-Dimensional Distributions of Economic Status", chapter 2 in *Social Justice and Public Policy*, Harvester Wheatsheaf, London.

- [5] Atkinson, A.B. and F. Bourguignon (1987). "Income Distribution and Differences in Needs", in G.R. Feiwel, ed., *Arrow and the foundations of the theory of economic policy*, New York Press, New York, 350–70.
- [6] Bourguignon, F., and S. R. Chakravarty (1998). "The measurement of multidimensional poverty", Delta working paper, **98-12** (forthcoming in *Journal of Economic Inequality*).
- [7] Bourguignon, F. and S.R. Chakravarty, (2002). "Multi-dimensional poverty orderings", DELTA, Paris.
- [8] Bourguignon, F. and G. Fields (1997). "Discontinuous Losses from Poverty, Generalized P Measures, and Optimal Transfers to the Poor", *Journal of Public Economics*, **63**,155–175.
- [9] Chakravarty, S.R. (1983). "A New Index of Poverty", *Mathematical Social Sciences*, **6**, 307–313.
- [10] Chambaz, C. and E. Maurin (1998). "Atkinson and Bourguignon Dominance Criteria : Extended and Applied to the Measurement of Poverty in France", *Review of Income and Wealth*, **44**, 77–124.
- [11] Crawford, Ian A. (1999). "Nonparametric Tests of Stochastic Dominance in Bivariate Distributions, with an Application to UK", University College London Discussion Papers in Economics 99/07.
- [12] Davidson, R. and J.-Y. Duclos (2000). "Statistical Inference for Stochastic Dominance and the for the Measurement of Poverty and Inequality", *Econometrica*, **68**, 1435–1465.
- [13] Duclos, J.-Y., ARAAR, A. and C. FORTIN (2002), "DAD : A Software for Distributive Analysis / Analyse distributive", MIMAP, International Research Centre, Government of Canada and CIRPÉE, Université Laval (www.mimap.ecn.ulaval.ca).
- [14] Duclos, J.-Y. and P. Makhdissi (2000). "Sequential Stochastic Dominance and the Robustness of Poverty Orderings", Cahier de recherche, Département d'économie, Université Laval.
- [15] Fishburn, P.C. and R.D. Willig (1984). "Transfer Principles in Income Redistribution", *Journal of Public Economics*, **25**, 323–328.
- [16] Foster, J.E., (1984). "On Economic Poverty : A Survey of Aggregate Measures", in R.L. Basman and G.F. Rhodes, eds., *Advances in Econometrics*,**3**, Connecticut : JAI Press, p. 215-251.
- [17] Foster, J.E., J. Greer and E. Thorbecke (1984). "A Class of Decomposable Poverty Measures", *Econometrica*, **52** (3), 761–776.
- [18] Foster, J.E. and A.F. Shorrocks (1988a). "Poverty Orderings", *Econometrica*, **56**, 173–177.
- [19] Foster, J.E. and A.F. Shorrocks (1988b). "Poverty Orderings and Welfare Dominance", *Social Choice Welfare*, **5**, 179–198.

- [20] Foster, J.E. and A.F. Shorrocks (1988c). "Inequality and Poverty Orderings", *European Economic Review*, **32**, 654–662.
- [21] Government of Romania (1994). Romania Integrated Household Survey.
- [22] Grosh, B. and P. Glewwe (1998). "Data Watch : The World Bank's Living Standards Measurement Study Household Surveys", *Journal of Economic Perspectives*, **12**, 187–96.
- [23] Howes, S. (1996). "A new test for inferring dominance from sample data", draft.
- [24] Jenkins, S.P. and P.J. Lambert (1993). "Ranking Income Distributions when Needs Differ", *Review of Income and Wealth*, **39**, 337–356.
- [25] Sahn, David E. and David C. Stifel (2000). "Poverty Comparisons Over Time and Across Countries in Africa," *World Development*, Vol. 28, Number 12.
- [26] Sahn, David E., David Stifel, and Stephen Younger (1999). "Inter-temporal Changes in Welfare : Preliminary Results from Nine African Countries," CFNPP Working Paper #94.
- [27] Sen, A.K. (1985), *Commodities and Capabilities*, North-Holland, Amsterdam.
- [28] Shorrocks, A.F., and J. Foster (1987). "Transfer Sensitive Inequality Measures", *Review of Economic Studies*, **LIV**, 485–497.
- [29] Tsui, K, (2002). "Multidimensional poverty indices", *Social Choice and Welfare*, **19**, 69–93.
- [30] United Nations Development Program (1990). *Human Development Report*. New York : Oxford University Press.
- [31] Watts, H.W. (1968), "An Economic Definition of Poverty", in D.P. Moynihan (ed.), *On Understanding Poverty*, New York : Basic Books.

FIG. 1: Indices de pauvreté d'union et d'intersection

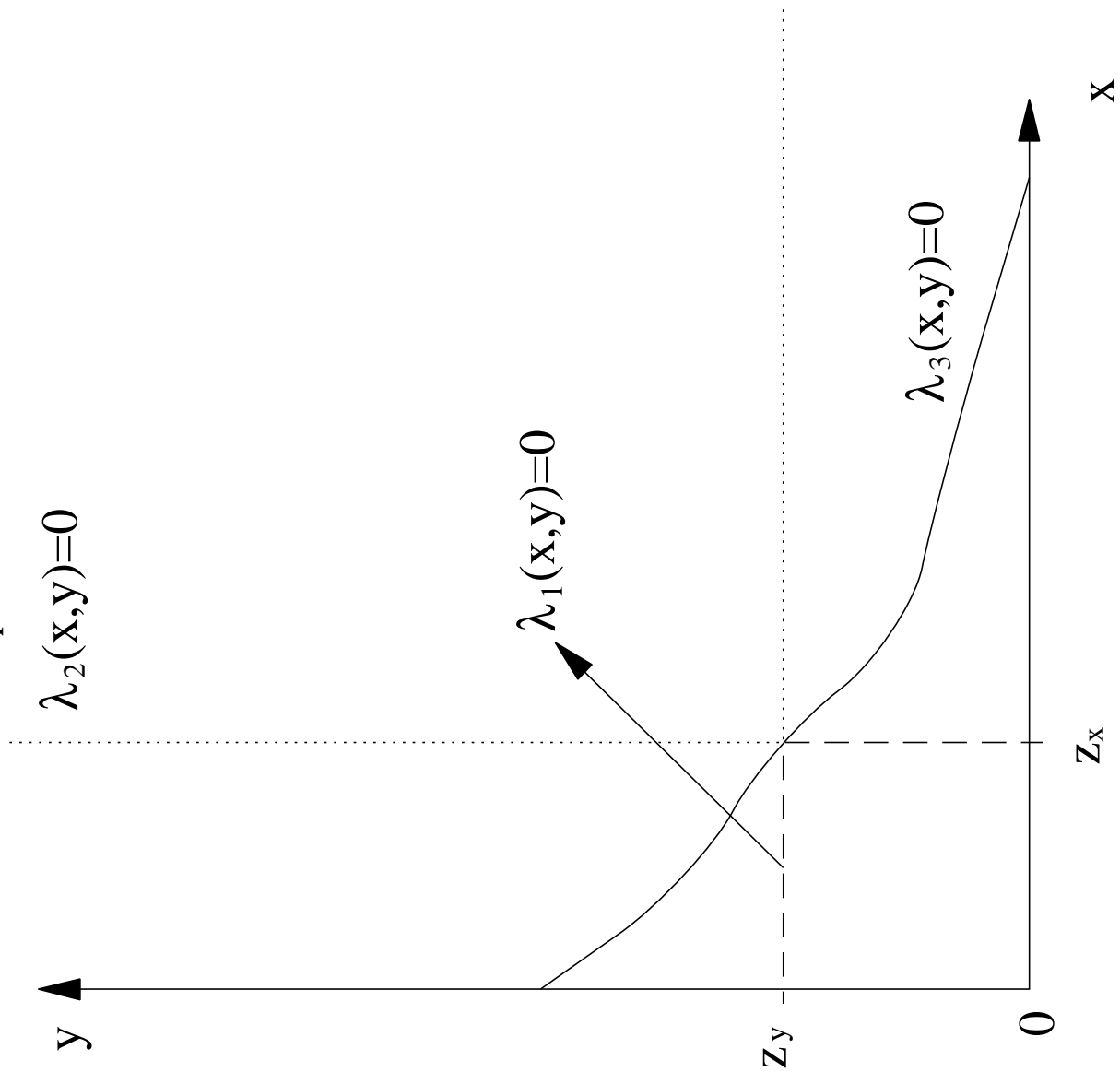


FIG. 2: Un déplacement qui augmente les corrélations

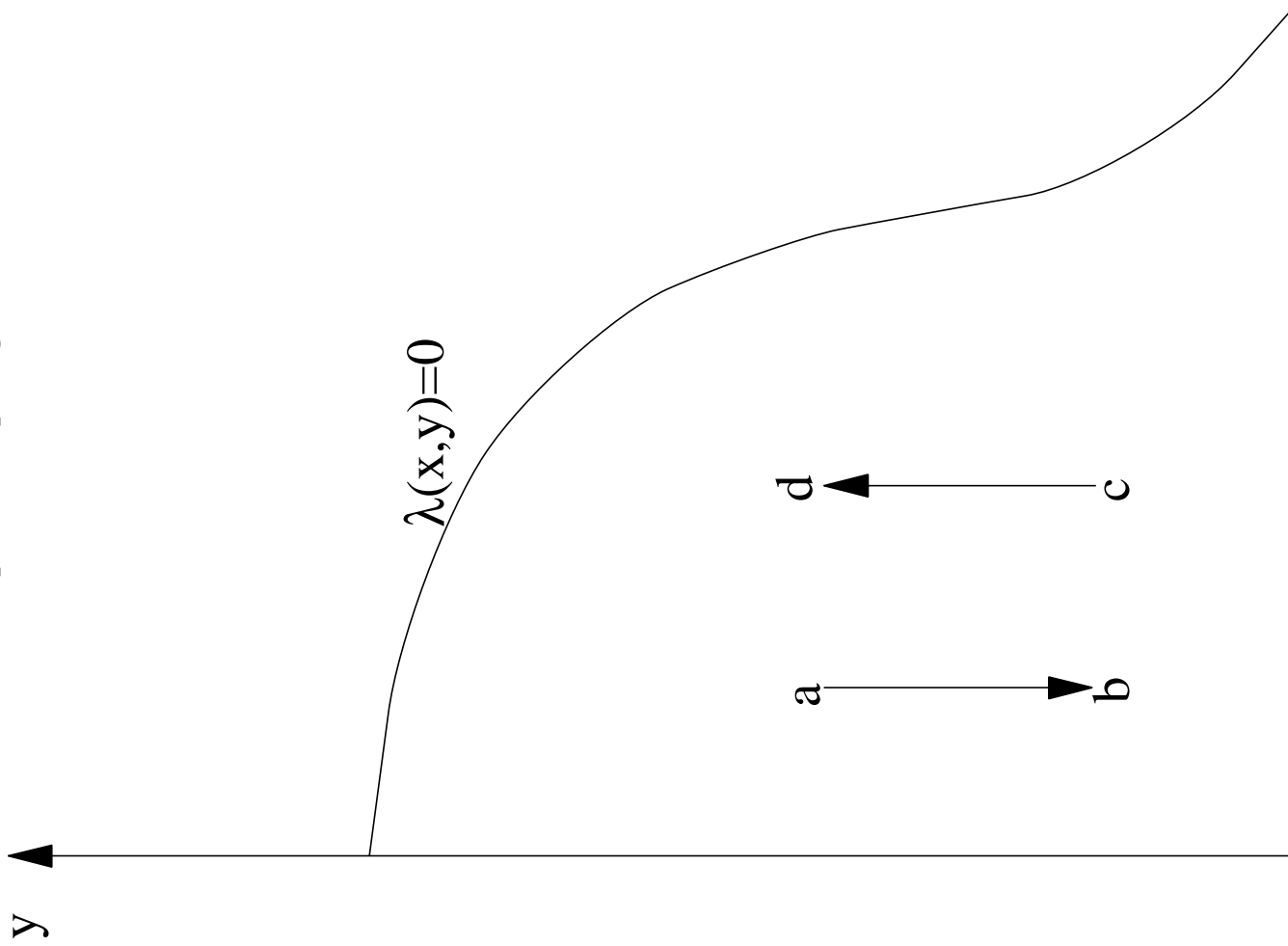


FIG. 3: Surface de dominance pour les enfants du Ghana, 1989

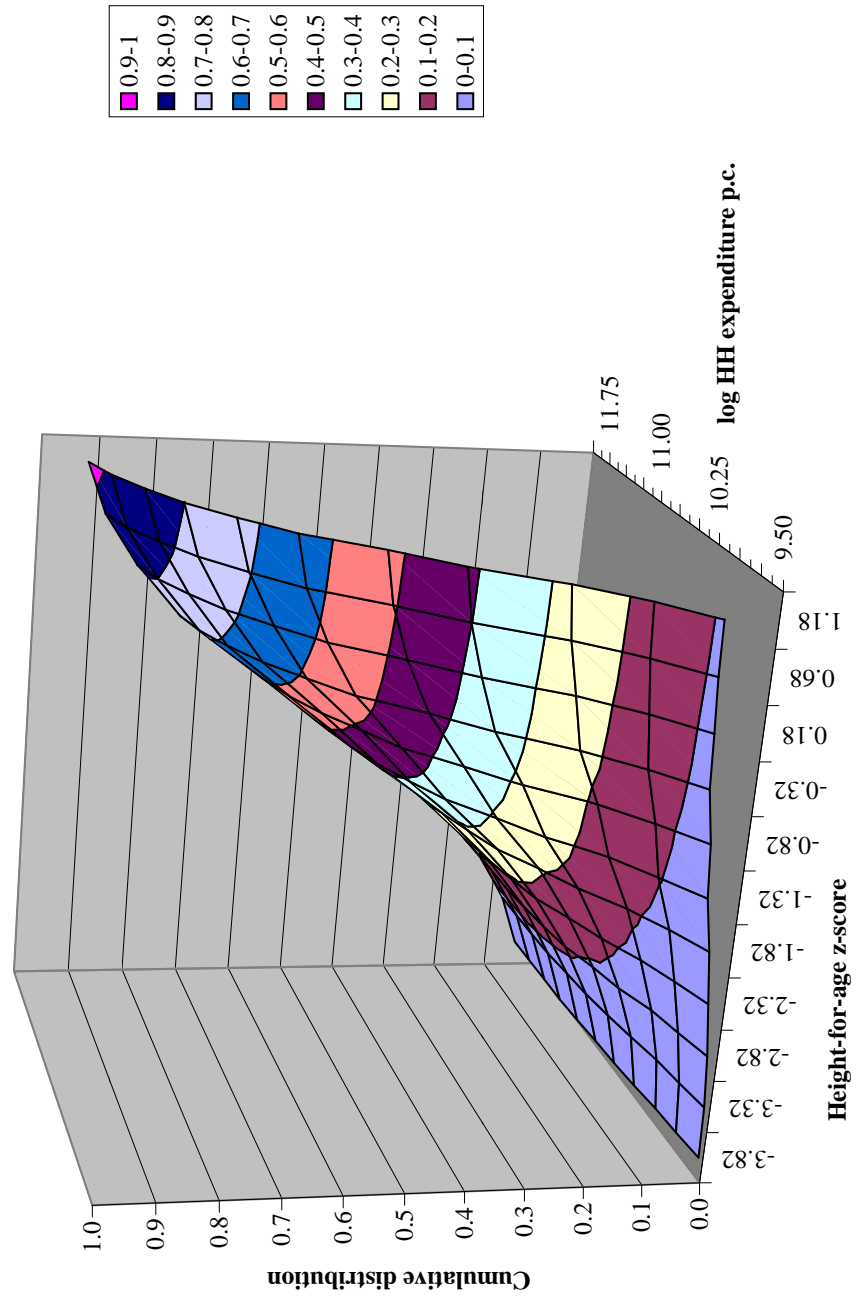


FIG. 4: Exemple de différence de surfaces de dominance, de dominance d'intersection sans dominance marginale

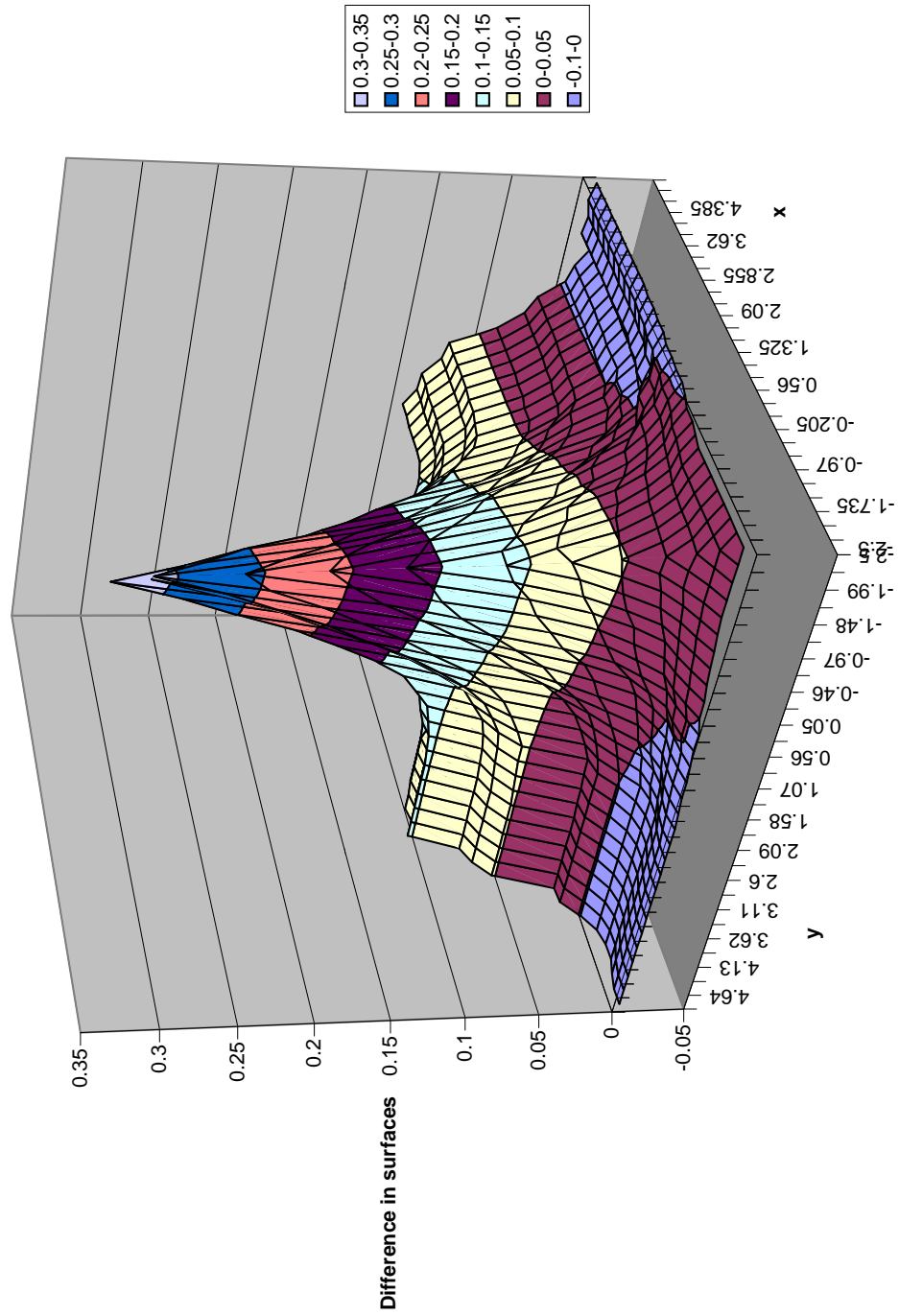


FIG. 5: Surface de dominance des urbains moins les ruraux au Vietnam

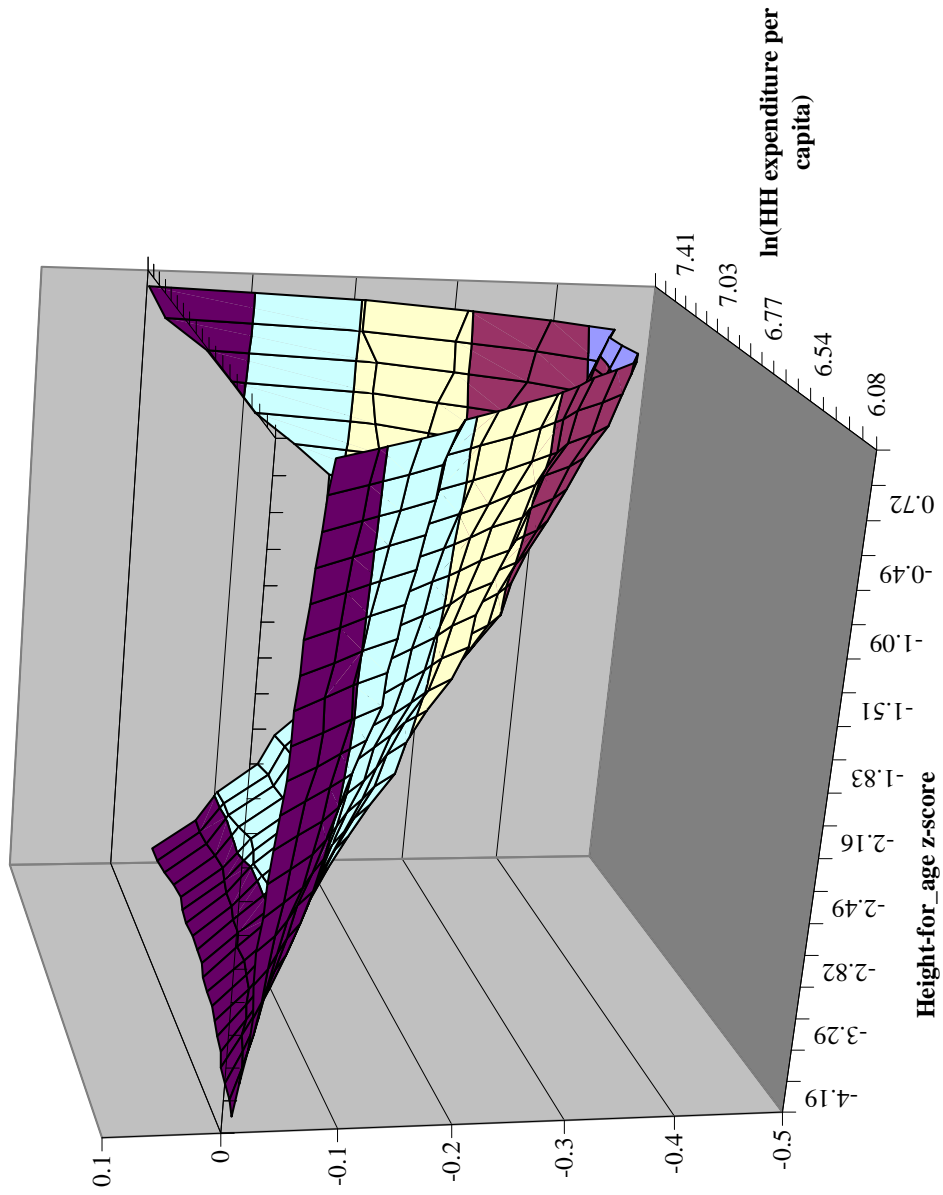


FIG. 6: Résultat des tests de différence entre les surfaces de dominance de 1993 et 1998 pour les enfants du Ghana

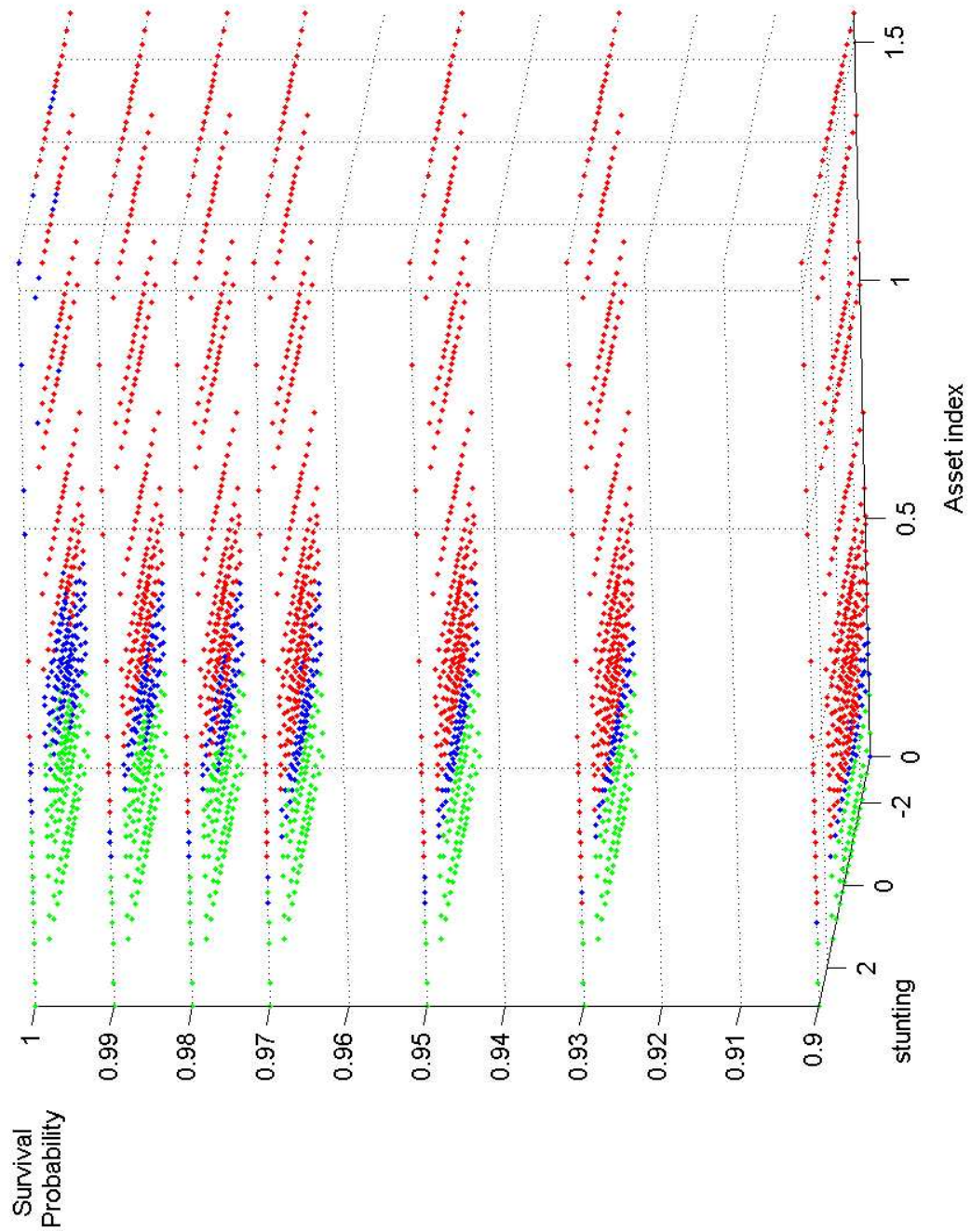


FIG. 7: Frontière critique de pauvreté, amaigrissement des enfants et probabilité de survie au Madagascar et en Egypte

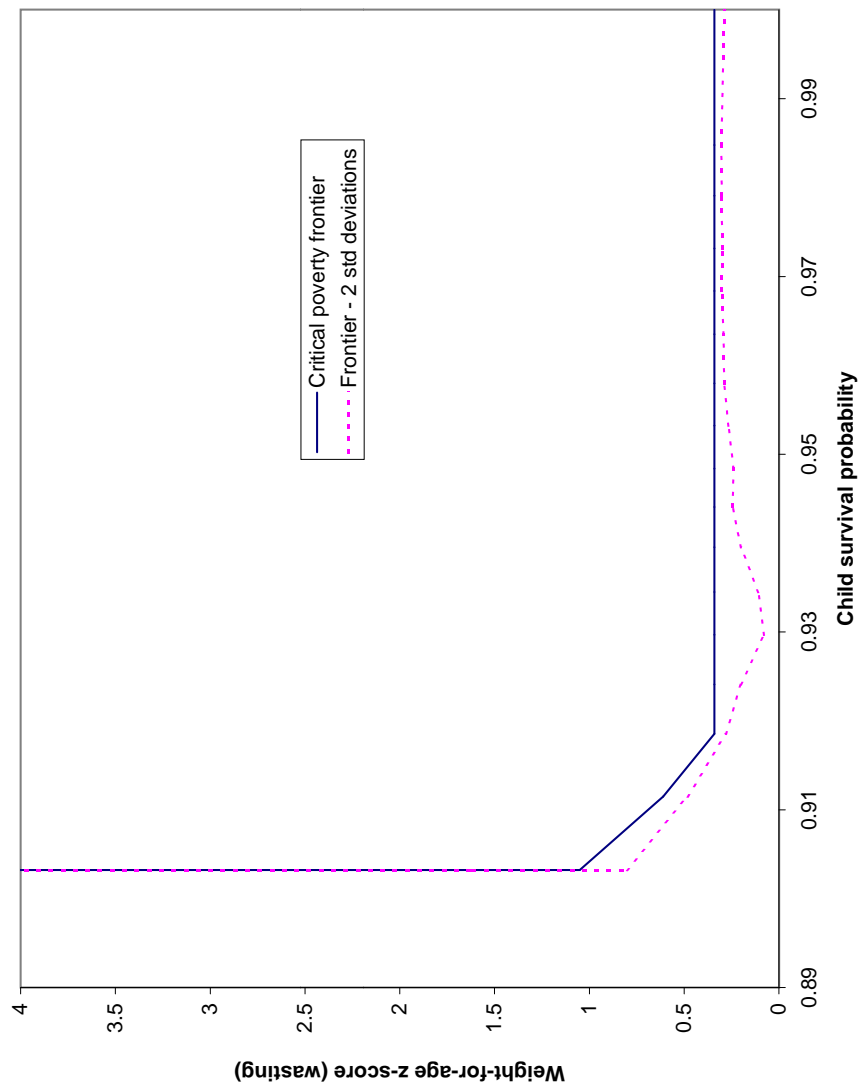
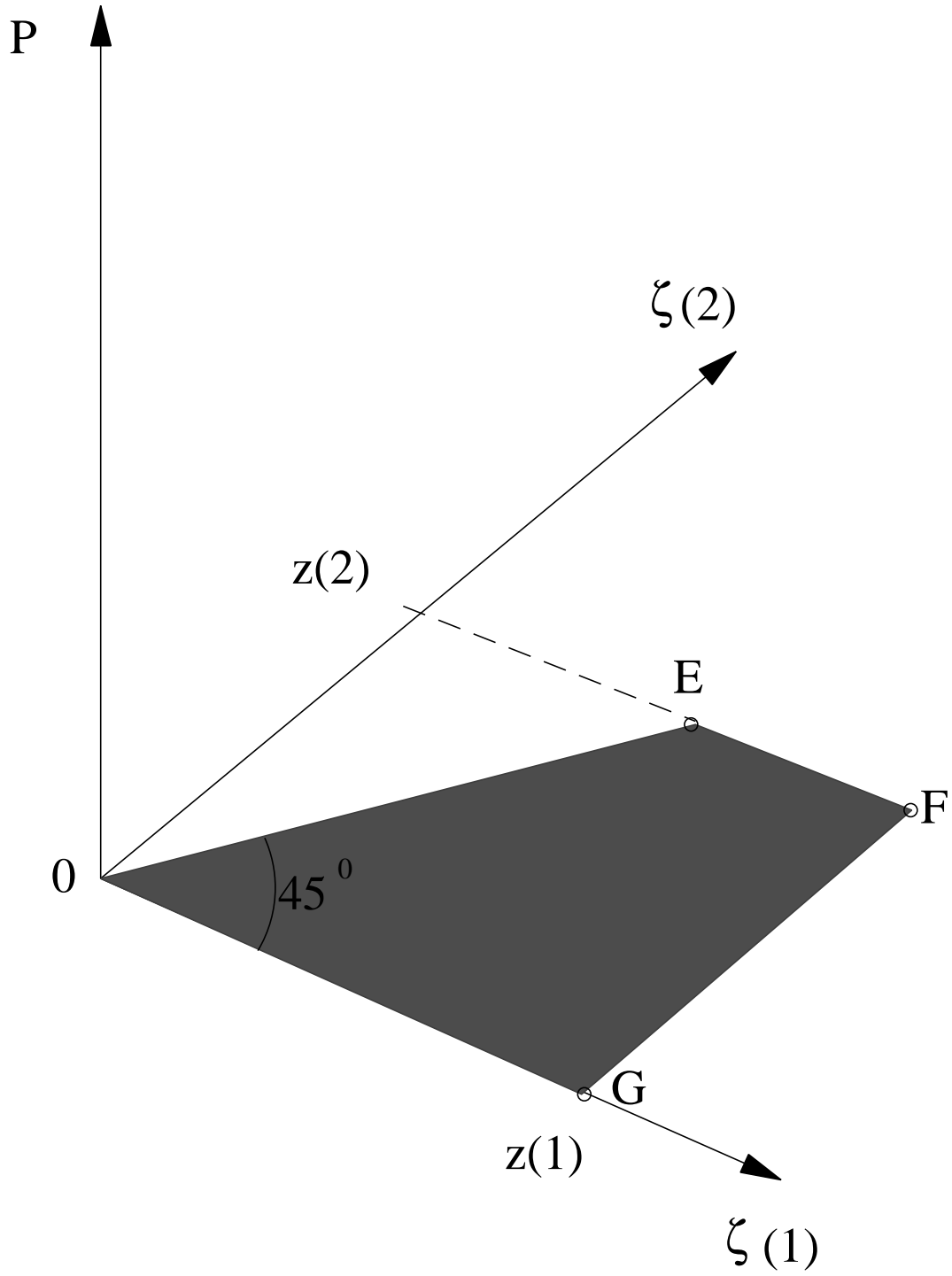


FIG. 8: Domaine de tests de dominance



TAB. 1: Résultats des tests de la différence entre les surfaces de dominance des enfants urbains et ruraux au Vietnam, 1993

log of household expenditure per capita \ height-for-age z-score	-4.19	-3.64	-3.29	-3.02	-2.82	-2.66	-2.49	-2.31	-2.16	-2.00	-1.83	-1.67	-1.51	-1.32	-1.09	-0.84	-0.49	0.01	0.72	5.47	
6.08	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.26	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.37	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.47	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.54	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.61	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.66	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.71	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.77	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.84	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.89	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6.95	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.03	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.08	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.41	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.59	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7.88	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
9.41	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0	0	0

Notes: Sx=1, Sy=1

A negative sign indicates that the urban dominance surface is significantly below the rural one, a positive sign indicates the opposite, and a zero indicates that the difference is not statistically significant.

TAB. 2: Résultats des tests de la différence entre les surfaces de dominance des enfants au Cameroun et à Madagascar, 1997

Height-for-age z-score \ Survival probability	Survival probability								
	0.83	0.86	0.88	0.89	0.90	0.91	...	0.99	1.00
-4.19	-	-	0	0	-	-	...	-	-
-3.66	0	0	0	0	-	-	...	-	-
-3.35	0	-	-	-	-	-	...	-	-
-3.13	0	-	-	-	-	-	...	-	-
-2.88	0	-	-	-	-	-	...	-	-
-2.66	-	-	-	-	-	-	...	-	-
-2.50	-	-	-	-	-	-	...	-	-

0.46	-	-	-	-	-	-	...	-	-
5.39	-	-	-	-	-	-	...	-	.

Notes: 1/ $S_x=1$, $S_y=1$

2/ A negative sign indicates that Madagascar's dominance surface is significantly above Cameroon's, a positive sign indicates the opposite, and a zero indicates that the difference is not statistically significant.

3/ The ellipses indicate that all intervening signs are negative.

TAB. 3: Résultats des tests de la différence entre les surfaces de dominance des enfants en Colombie et République Dominicaine, 1995 et 1996

Height-for-age z-score \ Survival probability	Survival probability						Survival probability					
	0.906	0.927	0.938	0.947	0.953	...	0.985	0.987	0.989	0.991	0.995	1.000
-2.85	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	0	0
-2.36	-	-	-	-	-	...	-	-	-	-	0	0
-2.07	-	-	-	-	-	...	-	-	-	-	0	0
-1.85	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	0	0
-1.67	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	0	0
-1.47	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	0	+
-1.33	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	0	+
-1.17	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	+	+
-1.04	-	-	-	-	-	...	-	-	0	0	+	+
-0.92	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	0	+
-0.76	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	+	+
-0.62	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	+	+
-0.49	-	-	-	-	-	...	-	-	-	0	+	+
-0.35	-	-	-	-	-	...	-	-	-	-	+	+
-0.12	-	-	-	-	-	...	-	-	-	-	+	+
0.07	-	-	-	-	-	...	-	-	-	-	0	+
0.34	-	-	-	-	-	...	-	-	-	-	0	+
0.68	-	-	-	-	-	...	-	-	-	-	0	+
1.05	-	-	-	-	-	...	-	-	-	-	-	+
5.92	-	-	-	-	-	...	-	-	-	-	-	0

Notes: $S_x=1$, $S_y=1$

A negative sign indicates that the Dominican Republic's dominance surface is significantly above Colombia's, a positive sign indicates the opposite, and a zero indicates that the difference is not statistically significant. The ellipses indicate that all intervening signs are negative.

TAB. 4: t de Student pour la différence entre le revenu des ménages avec des allocations familiales vs avec la sécurité sociale en Roumanie

Household income \ Household size						
	6 or more	5 or more	4 or more	3 or more	2 or more	1 or more
36,316	-30.51	-26.01	-20.24	-9.68	21.25	32.80
46,630	-36.27	-30.34	-24.34	-11.96	20.14	31.48
59,874	-41.95	-36.41	-29.30	-15.76	18.02	27.29
76,880	-47.80	-41.96	-34.84	-20.38	13.75	19.26
98,716	-54.91	-47.82	-39.52	-24.29	7.39	9.47
126,750	-57.50	-50.75	-42.30	-27.13	0.45	1.75
162,750	-59.59	-52.29	-45.60	-30.02	-10.08	-8.35
208,980	-47.90	-45.00	-42.05	-29.21	-15.98	-13.77
268,340	-38.35	-36.73	-35.02	-27.07	-17.62	-15.56
344,550	-27.02	-25.99	-25.41	-19.47	-13.52	-11.95
442,410	-17.74	-18.26	-17.04	-13.60	-8.63	-7.41
568,070	-18.13	-11.28	-10.25	-7.50	-4.46	-3.76
729,420	-7.23	-7.55	-7.58	-7.01	-2.68	-2.29
936,590	-4.30	-3.70	-3.26	-1.81	-0.25	-0.23
1,202,600	-10.34	-5.66	-3.48	-1.65	-0.07	-0.06
1,544,200	-7.86	-3.89	-2.17	-1.23	0.37	0.33

Notes: s=1. Results are similar for s=2 and s=3.
A negative sign indicates that income with child allowances dominates

TAB. 5: t de Student pour la différence entre les dépenses par tête des Péruviens illettrés ou non, 1985 moins 1994

Household income \ Literacy	Illiterate	Literate
	403	-1.95
518	-4.93	-5.76
665	-7.69	-8.35
854	-14.93	-15.33
1,097	-22.37	-24.37
1,408	-28.97	-31.28
1,808	-35.47	-38.95
2,322	-41.48	-46.19
2,981	-46.16	-51.91
3,828	-48.38	-53.91
4,915	-49.63	-55.40
6,311	-46.49	-51.90
8,103	-40.41	-45.30
10,405	-35.02	-39.00
13,360	-26.61	-29.54
17,154	-21.45	-23.74
22,026	-16.02	-17.51

Notes: s=1.

A negative sign indicates that household expenditures in 1985 dominate those in 1994, and vice-versa.